

Lineare Algebra (Informatik)

Übungsblatt 13

Aufgabe 1 (Lineares GLS mit Parameter) Bestimmen Sie, für welche t das folgende lineare Gleichungssystem in Matrixdarstellung lösbar ist, und geben Sie gegebenenfalls die allgemeine Lösung an:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t + 7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t + 8 \end{array} \right).$$

Lösung 1 Die Anzahl der Lösungen wird vom Parameter t beeinflusst. Wir wenden das Gaußsche Algorithmus an:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 2 & 12t \\ 2 & 12 & 7 & 12t + 7 \\ 1 & 10 & 6 & 7t + 8 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{I \leftrightarrow (III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 6 & 7t + 8 \\ 2 & 12 & 7 & 12t + 7 \\ 2 & 4 & 2 & 12t \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{III \rightarrow (-1) \cdot (II) + (III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 6 & 7t + 8 \\ 2 & 12 & 7 & 12t + 7 \\ 0 & -8 & -5 & -7 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{II \rightarrow (-2) \cdot (I) + (II)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 6 & 7t + 8 \\ 0 & -8 & -5 & -2t - 9 \\ 0 & -8 & -5 & -7 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{III \rightarrow (-1) \cdot (II) + (III)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 10 & 6 & 7t + 8 \\ 0 & -8 & -5 & -2t - 9 \\ 0 & 0 & 0 & 2t + 2 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Die Matrix hat Rang 2, also gibt es keinen t , sodass das LGS eine eindeutige Lösung hat. Das LGS hat nur Lösungen, falls $2t + 2 = 0 \iff t = -1$. Für $t = -1$ gibt es unendlich viele Lösungen, die das folgende LGS lösen:

$$\begin{aligned} x_1 + 10x_2 + 6x_3 &= 1 \\ -8x_2 - 5x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Eine spezielle Lösung dieses Gleichungssystems ist $(-9, 4, -5)$: Wir können in der zweiten Gleichung $x_3 = -5$ und $x_2 = 4$ einsetzen¹

Das homogene Gleichungssystem

$$x_1 + 10x_2 + 6x_3 = 0$$

¹Diese sind geschickt geraten, um ganzzahlige Werte in der 2. Gleichung zu bekommen. Wenn man nicht direkt gesehen hat, dass $-8 \cdot 4 + 5 \cdot 5 = -7$, kann man hier einen anderen Wert für x_3 wählen und einen rationalen Lösungsvektor bekommen, z.B. $(-\frac{27}{8}, -\frac{7}{8}, 0)$.

$$-8x_2 - 5x_3 = 0$$

hat einen eindimensionalen Lösungsraum und lässt sich lösen, indem wir z.B. $x_2 = -5\mu$ setzen. Dann muss $x_3 = 8\mu$ und $x_1 = 50\mu - 48\mu = 2\mu$. Die allgemeine Lösung des Gleichungssystems ist also der affine Raum

$$\left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 2 (Determinanten)

- (i) Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper und $A, B \in K^{n \times n}$. Beschreiben Sie den Effekt von elementaren Zeilen- und Spaltenumformungen auf $\det A$, und beweisen Sie damit, dass

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B.$$

Widerlegen Sie, dass im Allgemein $\det(A + B) = \det A + \det B$ gilt.

- (ii) Berechnen Sie jeweils die Determinante der folgenden Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$

Lösung 2

- (i) Seien $A, B \in K^{n \times n}, \lambda \in K \setminus \{0\}$

- nach einer EZU/ESU von Typ I (Multiplikation einer Zeile/Spalte um λ) wird die Determinante um λ skaliert, da $\det : K^{n \times n} \rightarrow K$ multilinear ist

$$\implies \det(P_i(\lambda) \cdot A) = \det(A \cdot P_i(\lambda)) = \lambda \cdot \det A = \det P_i(\lambda) \cdot \det A$$

- EZU/ESU von Typ II verändern die Determinante nicht. Denn:

$$\begin{aligned} & \det(a_1, \dots, a_i + \lambda a_j, \dots, a_n) \\ &= \det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, \lambda a_j, \dots, a_n) \quad (\text{Multilinearität}) \\ &= \det A + \lambda \cdot \underbrace{\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_j, \dots, a_n)}_{=0, \text{ da det alternierend ist}} \\ &= \det A \end{aligned}$$

$$\implies \det(Q_{ij}(\lambda) \cdot A) = \det(A \cdot Q_{ij}(\lambda)) = \det A = \det Q_{ij}(\lambda) \cdot \det A$$

- EZU/ESU von Typ III verändern das Vorzeichen der Determinante, da $\det$ alternierend ist.

$$\implies \det(S_{ij} \cdot A) = \det(A \cdot S_{ij}) = -\det A = \det S_{ij} \cdot \det A$$

Wir beweisen nun, dass $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$. Falls $\det B = 0$, dann ist $\det AB = 0$ (weder B noch AB haben vollen Rang), und die Aussage ist wahr. Seien also A, B invertierbar. Dann können wir beide als Produkt Elementarmatrizen schreiben²: $A = \Pi_i A_i, B = \Pi_j B_j$, und es gilt $\det A = \Pi_i \det A_i, \det B = \Pi_j \det B_j$. Also:

$$\det AB = \det(\Pi_i A_i \cdot \Pi_j B_j) = \Pi_i \det A_i \cdot \Pi_j \det B_j = \det A \cdot \det B.$$

²die genauen Elementarmatrizen liefert uns das Algorithmus zur Bestimmung der inversen Matrix mittels EZU

(ii) (a) Wir formen die Matrix um:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Typ II}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Typ II}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

(b)

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Typ III}}{=} -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\stackrel{\text{Typ III}}{=} - \left(-\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \right)$$

$$= (-i) \cdot i \cdot \det E_4 = 1$$

Aufgabe 3 (Eigenwerte, Eigenräume) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}.$$

- (i) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A .
- (ii) Bestimmen Sie alle zugehörigen Eigenräume.
- (iii) Geben Sie **zu jedem Eigenraum** eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren an.
- (iv) Geben Sie die (invertierbare) Matrix S an, mit der man A so transformieren kann, dass $D = S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

Lösung 3

(i) Wir bestimmen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &:= \det(A - \lambda E_3) \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + 15\lambda + 8 = -(\lambda + 1)(\lambda^2 - 7\lambda - 8) = (\lambda + 1)^2(8 - \lambda) \end{aligned}$$

Also sind die Eigenwerte durch $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 8$ gegeben.

(ii) Nun müssen die Eigenräume bestimmt werden:

Der Eigenraum zum Eigenwert 8 ist durch $\text{Eig}_A(8) = \text{Kern}(A - 8E_3)$ gegeben. Die Dimension ist mindestens 1, da das charakteristische Polynom eine Nullstelle hat, aber auch höchstens 1, da die geometrische Vielfachheit (d.h. die Dimension des Eigenraums) kleiner oder gleich die algebraische ist (d.h. die Vielfachheit der Nullstelle des Polynoms). Die Lineare Abbildung $A - 8E_3$ wird durch folgende Matrix dargestellt:

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

wir sehen, dass die Spalten v_1, v_2, v_3 folgende Relation erfüllen $v_2 = -2v_1 - 2v_3$. Damit finden wir folgenden Vektor im Kern: $(2, 1, 2)^\top$ und der Eigenraum ist durch $\text{span}\{(2, 1, 2)^\top\}$ gegeben.

Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist durch $\text{Eig}_A(-1) := \text{Kern}(A + E_3)$ gegeben. Die Dimension ist mindestens 1, da das charakteristische Polynom eine Nullstelle hat und höchstens 2, da die geometrische Vielfachheit kleiner oder gleich die algebraische ist. Die Lineare Abbildung $-1E_3 - A$ wird durch folgende Matrix dargestellt:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Offensichtlich sind alle Spalten linear abhängig von der ersten, also ist die Dimension des Eigenraums 2. Wir finden folgende linear unabhängige Vektoren im Kern:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Eig}_A(-1) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

(iii) • Der Eigenraum zum Eigenwert 8 ist eindimensional; $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ muss nur normiert werden:

$$\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = 3 \implies a_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

• Wir normieren zuerst $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Danach bestimmen wir einen zu b_1 orthogonalen Vektor b'_2 :

$$b'_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dann normalisieren wir:

$$b_2 = \frac{1}{\|b'_2\|} b'_2 = \sqrt{\frac{4}{18}} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{1}{3\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

(iv) Die drei Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und } v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

die die beiden Eigenräume aufspannen, bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$, da v_2 und v_3 nach Aufgabenteil (ii) linear unabhängig sind, und $v_1 \notin \text{span}(v_2, v_3)$. Also ist die Matrix $S = (v_1, v_2, v_3)$ die gesuchte Matrix, da sie genau den gewünschten Basiswechsel beschreibt. Die Diagonalmatrix $D = SAS^{-1}$ hat dann die Eigenwerte als Diagonaleinträge.